

Prévoir la production d'un engin solaire



ENM
École Nationale
de la Météorologie



Étude réalisée par Yannick Aspe, élève ingénieur à L'École Nationale de la Météorologie, dans le cadre du stage de deuxième année en juillet et août 2019.

Dans sa première partie cette étude expose et démontre les formules mathématiques nécessaires au calcul de l'énergie que peut produire un panneau solaire qui se déplace.

Les hypothèses qui sont faites, d'absence d'ombre et de nébulosité, sont peu réalistes et il faut considérer les résultats obtenus avec prudence.

Dans une deuxième partie, nous utilisons ces formules pour analyser statistiquement, sur la base d'une grande population de trajectoires aléatoires, le gain d'énergie que fournit un asservissement des panneaux.

En Annexe nous établissons des formules pour calculer le meilleur cap à donner à l'engin lorsque nous nous arrêtons afin d'assurer la meilleure orientation possible des panneaux.

Ce travail à été fait dans le cadre du stage d'élève ingénieur de deuxième années à l'École Nationale de la Météorologie durant les mois de juillet et Août 2019.

Je remercie M. Florian Bailly, le Gérant de la Sun Trip Company qui a encadré mon stage, et l'École Nationale de la Météorologie de m'avoir ainsi donné l'occasion de creuser une question qui m'intéressait depuis un bon moment.

Yannick Aspe, le 2 Octobre 2019.

Table des matières

Le repère :	4
Les vecteurs :	4
Les 6 angles :	4
Objectif de l'étude:	4
Le vecteur s :	4
Le vecteur n :	5
Cosinus(θ):	5
Optimisation en roulant:	6
Absorption de l'énergie solaire par l'atmosphère.....	6
Calcul de la position du soleil (α, φ).....	7
L'énergie produite par le panneau solaire.....	7
Simulation d'une randonnée circulaire.....	8
Simulation d'une randonnée de direction fixe par rapport au soleil.....	9
Simulation d'une randonnée aléatoire.....	10
Analyse de la randonnée du 16 mars 2019.....	11
Optimisation à l'arrêt (deux degrés de liberté):.....	13
Optimisation à l'arrêt (un degré de liberté):.....	14
Bibliographie :	14

Le repère :

On utilise un repère direct cartésien terrestre (O,i,j,k) .

- O est le centre du panneau solaire.
- i est le vecteur unitaire dirigé vers l'est.
- j est le vecteur unitaire dirigé vers le nord.
- k est le vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut

Les vecteurs :

- n est le vecteur unitaire orthogonal au plan des panneaux.
- s est le vecteur unitaire pointant le soleil.

Les 6 angles :

- p : l'angle de pente, c'est l'angle entre l'axe support de panneaux et le plan horizontal. C 'est une constante caractéristique de la remorque solaire. $p=20^\circ$.
- ρ : C 'est l'angle de rotation des panneaux solaires autour de l'axe support de panneaux. ρ est compris entre -45° et 45° .
- γ : c'est le cap, c'est l'angle entre le nord et la direction pointée par le timon de la remorque. Le nord est à 0° , l'est est à 90° . γ varie de 0° à 360° .
- α : l'élévation du soleil. C 'est l'angle entre la ligne d'horizon et le soleil. α varie de 0° lorsque le soleil se lève ou se couche à 90° lorsque le soleil est au zénith. Lorsque l'élévation est négative, il fait nuit.
- φ : l'azimut du soleil. C 'est l'angle entre le nord et le plan méridien local. Le nord est à 0° , l'est est à 90° . φ varie de 0° à 360° .
- θ : L'angle entre le vecteur normal au plan des panneaux et le soleil.

Objectif de l'étude:

- Le but de cette étude est d'évaluer le cosinus de θ , car la production solaire lui est directement proportionnelle.
- Ce cosinus est le produit scalaire de n et s . $\cos(\theta)=n \cdot s$

Le vecteur s :

- Les coordonnées se déduisent des angles solaires α et φ .
- $$s = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Le vecteur n :

On suppose au départ les panneaux dans le plan horizontal, le timon orienté au nord. On a alors $n=k$. Pour décrire une position quelconque on fait subir à la remorque 3 rotations autour des 3 axes principaux. n sera alors l'image de k par la composition des 3 rotations.

- Une rotation de ρ selon l'axe (O,j) : $R_j = \begin{pmatrix} \cos(\rho) & 0 & \sin(\rho) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\rho) & 0 & \cos(\rho) \end{pmatrix}$
- Une rotation de p selon l'axe (O,i) : $R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(p) & -\sin(p) \\ 0 & \sin(p) & \cos(p) \end{pmatrix}$
- Une rotation de $-\gamma$ selon l'axe (O,k) : $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a alors : $n = R_k \cdot R_i \cdot R_j \cdot k$

$$\text{Soit : } n = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(p) & -\sin(p) \\ 0 & \sin(p) & \cos(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\rho) & 0 & \sin(\rho) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\rho) & 0 & \cos(\rho) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit : } n = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(p) & -\sin(p) \\ 0 & \sin(p) & \cos(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\rho) \\ 0 \\ \cos(\rho) \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit : } n = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\rho) \\ -\sin(p) \cdot \cos(\rho) \\ \cos(p) \cdot \cos(\rho) \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit : } n = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \cdot \sin(\rho) - \sin(\gamma) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\rho) \\ -\sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) - \cos(\gamma) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\rho) \\ \cos(p) \cdot \cos(\rho) \end{pmatrix}$$

Cosinus(θ):

$$\cos(\theta) = n \cdot s = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \cdot \sin(\rho) - \sin(\gamma) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\rho) \\ -\sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) - \cos(\gamma) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\rho) \\ \cos(p) \cdot \cos(\rho) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit : } \cos(\theta) = -\sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\gamma) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + \cos(p) \cdot \cos(\rho) \cdot \sin(\alpha)$$

Optimisation en roulant:

ρ est la seule grandeur sur laquelle on peut agir.

$$\text{Soit } \cos(\theta) = A \cdot \cos(\rho) + B \cdot \sin(\rho)$$

$$\text{en posant } A = -\sin(\gamma) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - \cos(\gamma) \cdot \sin(p) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + \cos(p) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{et } B = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi)$$

On cherche à maximaliser la production d'énergie en orientant les panneaux solaires, c'est-à-dire que l'on cherche la valeur de ρ qui maximise $\cos(\theta)$. On pense à annuler la dérivée.

$$\frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \rho} = B \cdot \cos(\rho) - A \cdot \sin(\rho) \quad \text{s'annule pour } \rho = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

- **Remarque :** Si l'on roule avec les panneaux « à plat », c'est-à-dire $\rho = 0$, on aura $\cos(\theta_0) = A$

Absorption de l'énergie solaire par l'atmosphère.

L'énergie solaire en haut de l'atmosphère est $S_0 = 1370 \text{ W/m}^2$. Seule une partie arrive sur le panneau, le reste étant absorbé par l'atmosphère. La partie qui arrive sur le panneaux est :

$$S_p = (Kr + Kf) \cdot S_0 = Kt \cdot S_0$$

Kr qualifiant le rayonnement direct et Kf le rayonnement diffus.

D'après la publication de Benoît Beckers & Pierre Beckers « *Calcul du rayonnement solaire atténué par l'atmosphère* » nous avons les formules suivantes :

$$Kr = \tau^m \quad Kf = 0.3(1 - \tau^m) \frac{1 + \sin(\alpha)}{2} \sin(\alpha) \quad \text{avec } m = \frac{e^{-\frac{h}{8200}}}{\sin(\alpha)} \quad \text{où :}$$

- m est l'épaisseur optique de l'air à l'altitude h en mètre et pour une élévation solaire α . Au niveau de la mer $m = \frac{1}{\sin(\alpha)}$.
- τ est la transmittance atmosphérique, nombre sans dimension, compris entre 0,65 et 0,75. On prendra $\tau = 0,7$.

Calcul de la position du soleil (α, φ)

En un point du globe déterminé par sa latitude λ , sa longitude l et l'heure UTC.

On utilisera la publication « Calculs astronomiques simplifiés » de Vincent Bourdin 2014 de l'Université Paris-Sud Orsay – Master PAM 2^{ème} année – Energies renouvelables – Energie solaire thermique.

On note J le rang du jour dans l'année, sachant que pour le premier janvier $J=1$.

La déclinaison est alors $\delta = 23.45 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \frac{(J+284)}{365}\right)$ avec une erreur sur δ comprise dans l'intervalle $[-1,4^\circ; +0,5^\circ]$.

ω : angle horaire, deuxième coordonnée équatoriale du Soleil, défini comme l'angle, compté positivement vers l'Est, entre la position actuelle du plan méridien local et la position de ce même méridien à midi vrai (ou entre le plan méridien local et le plan méridien qui contient le centre du Soleil à l'instant qui nous concerne).

$\omega = \pi \cdot \left(1 - \frac{H}{12}\right)$ Où H est l'heure solaire vraie, 12h quand le centre du Soleil passe dans le plan méridien local.

$H = UTC + \Delta H - E_t$ Où E_t est l'équation du temps et ΔH est le décalage horaire dû à la longitude du point étudié (avance de $\frac{24 \times 60}{360} = 4$ mn par degré de longitude vers l'Est, et retard de 4 mn par degré vers l'Ouest). $\Delta H = 4 \cdot l$

L'équation du temps est déterminée par $E_t = 7.53 \cos(F) + 1.5 \sin(F) - 9.87 \sin(2F)$ où $F = 2\pi \frac{J-81}{365}$.

On peut alors calculer $\sin(\alpha)$: $\sin(\alpha) = \sin(\delta) \cdot \sin(\lambda) + \cos(\delta) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\omega)$, λ étant la latitude du point étudié.

On peut aussi calculer $\sin(\varphi)$: $\sin(\varphi) = \frac{\cos(\delta) \cdot \sin(\omega)}{\cos(\alpha)}$.

et alors : $\varphi = \pi - \arcsin(\varphi)$.

L'énergie produite par le panneau solaire.

L'énergie produite par un mètre carré de panneau solaire est donné par :

$S = Kd \cdot Kt \cdot \rho_p \cdot \cos(\theta) \cdot S_0$ en W/m^2 où ρ_p est le rendement du panneau solaire, $\rho_p \simeq 0,2$ et Kd est le coefficient tenant compte des variations de la distance du Soleil à la Terre.

$$Kd = 1 - \frac{\sin(\delta)}{11,5}$$

Simulation d'une randonnée circulaire.

On peut maintenant produire une simulation dans laquelle nous comparerons la production réalisée lorsque le panneau est asservi en position pour suivre au mieux le soleil à la production réalisée lorsque le panneau reste « à plat ». Nous simulerons une randonnée circulaire d'une durée de 8 heures entre 8 UTC et 16 UTC pour trois dates caractéristiques : Les solstices et une équinoxe, avec 4 directions de départ correspondant aux 4 points cardinaux et deux sens de circulation : le sens direct et indirect. Nous aurons donc $3.4.2 = 24$ résultats. Les calculs sont effectués dans le fichier Libre Office Calc *simulation.ods*. Nous prendrons les hypothèses suivantes :

- La randonnée sera centrée sur le point de coordonnées $\lambda = 45^\circ \text{ N}$, $l = 0^\circ$, $h = 0 \text{ m}$. Et on négligera les changements de longitude et latitude : λ et l restent constantes.
- Le temps est discrétisé en quart d'heures, on considérera un changement de cap constant tous les quarts d'heures. Il y aura 30 changements de cap, le premier à 8:15 UTC et le dernier à 15:45 UTC. Ce changement sera de $\pm 360/31$ selon que le sens est direct ou indirect.
- Nous négligerons les variations de θ et Kt durant chaque quart d'heure. Dans ce cas le gain

se calcule de la façon suivante :
$$\frac{\sum_{i=1}^{32} Kt_i \cdot \cos(\theta_i)}{\sum_{i=1}^{32} Kt_{0i} \cdot \cos(\theta_{0i})}$$
, l'indice 0 signifiant que l'on se situe

dans le cas où les panneaux sont « à plat ».

- Nous limiterons la rotation ρ à l'intervalle $[-45^\circ, +45^\circ]$.

Résultats :

Direction de départ	22 décembre		22 mars		22 juin	
	Direct	Indirect	Direct	Indirect	Direct	Indirect
Nord	1,787	1,589	1,446	1,336	1,155	1,118
Est	2,087	1,941	1,423	1,321	1,12	1,102
Sud	2,323	5,233	1,306	1,625	1,111	1,183
Ouest	1,981	2,058	1,424	1,338	1,119	1,101
Moyenne	2044.5	2705.25	1399.75	1405	846.25	1126

Commentaires :

- Les dissymétries observées viennent de la pente des panneaux.
- L'asservissement est d'autant plus efficace que le soleil est bas. On double la production d'énergie en hiver alors qu'en été on l'augmente de 10 %.
- Le sens de circulation a surtout son importance en hiver.
- Le gain moyen est de 1,6 en donnant un poids double aux valeurs de l'équinoxe.

Simulation d'une randonnée de direction fixe par rapport au soleil.

On produit une simulation similaire à la précédente, à la différence près que l'on se déplace perpendiculairement au soleil.

On trouve les gains suivants :

- En hiver : 3,055.
- En été : 1,238.
- Au printemps ou à l'automne : 1,704.
- Moyenne : 1,93.

Remarque : lorsqu'on se dirige vers le soleil ou à l'opposé du soleil on retrouve bien qu'il faut rouler avec les panneaux « à plat » et le gain est exactement 1.

Simulation d'une randonnée de direction fixe .

On produit une simulation similaire à la précédente, à la différence près que l'on se déplace suivant une direction fixe.

	22 décembre	22 mars	22 juin
Nord	11,699	1,639	1,222
Nord Est	5,636	1,549	1,142
Est	2,61	1,482	1,061
Sud Est	1,61	1,296	1,123
Sud	1,198	1,211	1,155

Simulation d'une randonnée aléatoire.

Nous nous rapprochons de la réalité en simulant une randonnée aléatoire. Toujours de 8 UTC à 16 UTC pour les trois dates caractéristiques. La première direction est choisie au hasard, et tous les quarts d'heure on choisi un changement de cap entre -20° et 20° . on simule 1000 randonnées par date . On obtient les statistiques sur les gains suivantes :

	22/03/19	22/06/19	22/12/19
Moyenne	1,3563006122	1,1131605348	2,1966236293
Ecart type	0,109044189	0,03770628	0,5206674214
Minimum	1,0416305034	1,0127556177	1,0897602058
Q1	1,2753143616	1,0852697291	1,7586381101
Médiane	1,3617165583	1,1141641518	2,2309660376
Q3	1,432722708	1,142040645	2,6547243687
Maximum	1,6205169699	1,2042127683	3,1601892093

On voit que les gains dus à l'asservissement sont très importants en hiver, puisque le soleil est bas. L'écart type important en hiver traduit le fait le cap suivi par rapport au soleil influe fortement le gain .

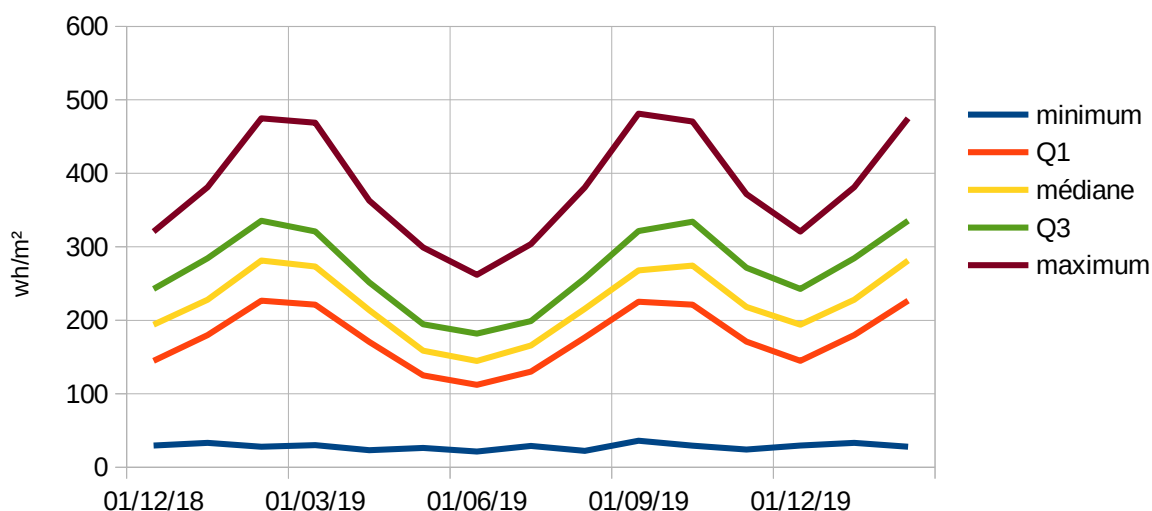
Il est intéressant de quantifier l'énergie produite en plus en Wh par mètre carré de panneau exposé. Ci dessous la production d'énergie supplémentaire en Wh par m² de panneau solaire exposé en fonction de la date. Nous avons réalisé 1000 simulation pour chaque date.

	22/12/18	22/01/19	22/02/19	22/03/19	22/04/19	22/05/19	22/06/19
moyenne	191,20531853	227,33391591	279,03937538	270,66313278	210,84663717	159,43695778	145,79546542
écart type	65,998396003	75,561412974	84,885867575	73,772082695	57,025508203	49,114017825	46,94157483
	22/12/18	22/01/19	22/02/19	22/03/19	22/04/19	22/05/19	22/06/19
minimum	29,598372785	33,320623209	27,926429373	30,061397955	23,237112211	26,264225503	21,490100098
Q1	144,94849426	179,89848574	226,77693605	221,38911966	170,72820102	125,1789001	112,1787321
médiane	193,94087361	228,06389911	281,38912919	273,34046326	213,98535092	158,67073114	144,71623168
Q3	242,75322736	284,41178686	335,47607436	321,04324226	251,71307652	194,68347574	181,81558896
maximum	320,83646666	381,19541906	474,97132769	468,92821893	362,86815424	299,14751894	261,91161092

	22/07/19	22/08/19	22/09/19	22/10/19	22/11/19	22/12/19	22/01/20	22/02/20
moyenne	164,57335318	214,76925131	271,39760018	275,95794518	217,28930266	191,20531853	227,33391591	279,03937538
écart type	48,193905003	59,402764854	75,647168588	85,132848807	73,204129859	65,998396003	75,561412974	84,885867575
	22/07/19	22/08/19	22/09/19	22/10/19	22/11/19	22/12/19	22/01/20	22/02/20
minimum	29,021106624	22,242773365	36,06423366	29,343681313	24,230118744	29,598372785	33,320623209	27,926429373
Q1	130,05873157	176,58336406	225,25462916	221,39568214	170,88665493	144,94849426	179,89848574	226,77693605
médiane	165,83546668	215,68150001	267,99710625	274,3993824	218,17852946	193,94087361	228,06389911	281,38912919
Q3	198,97848821	257,21406528	321,58595462	334,21615519	271,53314664	242,75322736	284,41178686	335,47607436

Energie produite par l'asservissement

En Wh par m² de panneau solaire installé



La production supplémentaire maximale se situe aux équinoxes. Il y a un minimum compréhensible en hiver. Le minimum secondaire d'été s'explique par le fait que nous simulons des randonnées entre 8 UTC et 16 UTC au moment où le soleil est haut dans le ciel, diminuant ainsi fortement l'intérêt d'un asservissement. La simulation d'une randonnée de 7 UTC à 17 UTC donne un gain d'énergie médian de 232 Wh/m². Des simulations sur une journée complète de 5:00 UTC à 19:00 UTC donne un surplus d'énergie médian de 300 Wh/m². C'est supérieur à une randonnée de 8 heures au moment des équinoxes mais ce n'est toujours pas énorme.

En résumé, sur une randonnée de 8 heures, on peut raisonnablement s'attendre à augmenter la production d'au moins 200 Wh par m² exposé en roulant. C'est équivalent à 1 heure de fort ensoleillement (1000 w/m²). C'est quantitativement important et cela peut justifier que l'on s'investisse dans le développement d'une solution technique.

Analyse de la randonnée du 16 mars 2019.

Nous avons réalisé une randonnée le 16 mars 2019 de 9:00 UTC à 18:00 UTC ; d'une longueur de 90 km, d'un dénivelé de 1300 m. La consommation s'est élevée à 20 Ah et la production s'est établie à 13 Ah. La course était globalement face au soleil, il y avait beaucoup de routes ombragées et un léger voile d'alto-status masquait le soleil. Nous avons conservé le panneau « à plat ». Nous avons extrait le fichier format .csv du GPS GARMIN etrex 30 à l'aide de l'interface MapSource de Garmin et l'avons traité sur tableur Libre Office Calc.

La simulation donne une production « panneaux à plat » de 32 Ah. Les différents ombrages : nuages, végétation, ombre portée du pilote... donnent un coefficient de 0,405. La simulation de l'asservissement donne une production de 43,9 Ah. En tenant compte de l'ombrage nous estimons que nous aurions produit avec asservissement 17,8 Ah soit un gain de 4,8 Ah ou 240 Wh. A comparer aux 7 Ah manquant en fin de journée.

ANNEXES

Optimisation à l'arrêt (deux degrés de liberté):

On peut agir sur ρ et γ . On obtient la fonction de deux variables :

$$\cos(\theta) = A \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\rho) + B \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\rho) + C \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) + D \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\rho) + E \cdot \cos(\rho)$$

$$\begin{aligned} A &= \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ B &= -\sin(p) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ \text{avec } C &= -\cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ D &= -\sin(p) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\ E &= \cos(p) \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \gamma} = -A \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) + B \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\rho) + C \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\rho) - D \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\rho)$$

$$\frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \rho} = A \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\rho) - B \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) + C \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\rho) - D \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\rho) - E \cdot \sin(\rho)$$

$$\frac{\partial^2 \cos(\theta)}{\partial \rho^2} = -\cos(\theta) \quad \frac{\partial^2 \cos(\theta)}{\partial \gamma^2} = -\cos(\theta) + E \cdot \cos(\rho)$$

Soit $f(\rho, \gamma)$ l'équation d'un paraboloides d'extremum c obtenu au point $\Omega(\rho_0, \gamma_0)$. on a :

$$f(\rho, \gamma) = a(\rho - \rho_0)^2 + b(\gamma - \gamma_0)^2 + c \quad \text{qui se dérive en :}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = 2a(\rho - \rho_0) \quad , \quad \frac{\partial f^2}{\partial \rho^2} = 2a \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 2b(\gamma - \gamma_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} = 2b \quad . \quad \text{On en déduit alors les}$$

coordonnées de $\Omega(\rho_0, \gamma_0)$:

$$\rho_0 = \rho - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}} = \rho + \Delta \rho \quad \text{et} \quad \gamma_0 = \gamma - \frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}} = \gamma + \Delta \gamma \quad \text{avec} \quad \Delta \rho = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}} \quad \text{et} \quad \Delta \gamma = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}} \quad .$$

La méthode numérique proposée pour trouver l'extremum est d'assimiler la fonction $\cos(\theta)$ à un paraboloides de façon itérative.

Conclusion :

- La méthode du paraboloides tangent est instable et on doit l'abandonner.
- Il vaut mieux passer avec la méthode du gradient en posant $\Delta \rho = \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \rho}$ et

$$\Delta \gamma = \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \gamma}$$

Optimisation à l'arrêt (un degré de liberté):

On ne peut agir que sur γ . C'est le cas lorsque le soleil est assez bas et l'on sait que l'on est obligé de pencher les panneaux au maximum. On a alors :

$$\cos(\theta) = \cos(\gamma) \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\rho) \cdot \cos(\rho) \cdot \sin(\alpha)$$

Soit : $\cos(\theta) = A \cdot \cos(\gamma) + B \cdot \sin(\gamma) + C$ avec :

$$A = \sin(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi)$$

$$B = -\sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - \sin(\rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi)$$

$$C = \cos(\rho) \cdot \cos(\rho) \cdot \sin(\alpha)$$

On cherche à maximaliser la production d'énergie en orientant les panneaux solaires, c'est-à-dire que l'on cherche la valeur de γ qui maximise $\cos(\theta)$. On pense à annuler la dérivée :

$$\frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \gamma} = B \cdot \cos(\gamma) - A \cdot \sin(\gamma) \quad \text{s'annule pour} \quad \gamma = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

Bibliographie :

- Benoît Beckers & Pierre Beckers « *Calcul du rayonnement solaire atténué par l'atmosphère* »
- « *Calculs astronomiques simplifiés* » de Vincent Bourdin 2014 de l'Université Paris-Sud Orsay – Master PAM 2^{ème} année – Energies renouvelables – Energie solaire thermique.